ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN THỊ ĐIỆP

PHƯƠNG PHÁP CHIẾU GIẢI BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN HAI CẤP

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên, năm 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN THỊ ĐIỆP

PHƯƠNG PHÁP CHIẾU GIẢI BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN HAI CẤP

Ngành: Toán giải tích
Mã số: 8 46 01 02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Cán bộ hướng dẫn khoa học
GS.TSKH. NGUYỄN XUÂN TẤN

Thái Nguyên, năm 2019

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan Luận văn **"Bài toán Bất đẳng thức biến phân hai cấp"** là công trình nghiên cứu khoa học của riêng tôi dưới sự hướng dẫn trực tiếp của **GS. TSKH. Nguyễn Xuân Tấn**.

Ngoài ra, trong luận văn tôi còn sử dụng một số kết quả, nhận xét của một số tác giả khác đều có chú thích và trích dẫn nguồn gốc.Trong quá trình nghiên cứu, tôi đã kế thừa thành quả khoa học của các nhà khoa học với sự trân trọng và biết ơn.

Nếu phát hiện bất kỳ sự gian lận nào tôi xin hoàn toàn chịu trách nhiệm về nội dung luận văn của mình.

Thái Nguyên, ngày 30 tháng 04 năm 2019

Tác giả

NGUYỄN THỊ ĐIỆP

Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học Sư phạm Thái Nguyên. Tác giả xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc đến **GS. TSKH. Nguyễn Xuân Tấn** người thầy đã trực tiếp hướng dẫn, tận tình chỉ bảo và động viên tác giả trong suốt thời gian nghiên cứu vừa qua.

Tác giả trân trọng gửi lời cảm ơn đến các thầy, cô giáo Khoa Toán, Phòng Đào tạo Sau đại học, các bạn học viên lớp Cao học K25 Toán giải tích trường Đại học Sư phạm Thái Nguyên đã luôn giúp đỡ, tạo điều kiện thuận lợi cho tác giả trong quá trình học tập và nghiên cứu tại trường.

Tác giả cũng xin bày tỏ biết ơn sâu sắc tới gia đình và người thân đã luôn khuyến khích, động viên tác giả trong suốt quá trình học tập và làm luận văn.

Tác giả mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu của các thầy cô và bạn đọc để luận văn được hoàn thiện hơn.

Thái Nguyên, ngày 30 tháng 04 năm 2019

Tác giả

NGUYỄN THỊ ĐIỆP

Danh mục các ký hiệu viết tắt

R	tập số thực
$\in$	thuộc của một phần tử đối với tập hợp
$\forall x$	mọi x
R^n	không gian Euclid thực n-chiều
H	không gian Hilbert thực
$x^n \to x$	dãy hội tụ mạnh tới x
$x^n \rightharpoonup x$	dãy hội tụ yếu tới x
$\|m\| = \sqrt{\langle m, m \rangle}$	chuẩn của vectơ m
$\langle m, m \rangle$	tích vô hướng của hai vectơ m và n
$H \times H$	tích đề các của H vào H
$T : A \to H$	ánh xạ từ A vào H
$Pr_A(x)$	hình chiếu của x lên tập A
T_A^{nat}	ánh xạ giá tự nhiên của T trên A
$VI(T, A)$	bài toán Bất đẳng thức biến phân
$CP(T, A)$	bài toán bù xác định bởi nón A và ánh xạ T
$Sol(T, A)$	tập nghiệm của bài toán VI (T,A)
$EP(A, f)$	bài toán cân bằng
$BVI(T, G, A)$	bài toán bất đẳng thức biến phân hai cấp.

Mục lục

LỜI MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài.

Bài toán bất đẳng thức biến phân được Stampacchia, nhà toán học người Ý đưa ra từ cuối những năm 50 đầu những năm 60 của thế kỉ XX. Trước hết, ông đưa ra bài toán trong không gian R^n. Bài toán được phát biểu như sau: Cho $A \subset R^n$ là một tập hợp, $T : A \to R^n$. Bài toán: Tìm $\overline{x} \in A$ sao cho

$$\langle T(\overline{x}), x - \overline{x} \rangle \geq 0 \text{ với mọi } x \in A. \tag{1}$$

Bài toán này được gọi là bài toán bất đẳng thức biến phân, $\overline{x}$ là nghiệm của (1). Thông thường người ta ký hiệu bài toán này là (VI(T,A)), tiếng anh: Variational inequality.

Sau đó bài toán này được mở rộng thành trường hợp tổng quát hơn: Cho $\varphi : A \to R$, bài toán: Tìm $\overline{x} \in A$ sao cho

$$\langle T(\overline{x}), x - \overline{x} \rangle + \varphi(x) - \varphi(\overline{x}) \geq 0.$$

Bài toán này được gọi là bài toán bất đẳng thức biến phân suy rộng.

Hiển nhiên rằng những bài toán này bao luôn bài toán tối ưu. Tiếp theo những bài toán này được mở rộng sang không gian vô hạn chiều và được áp dụng vào nhiều bài toán của phương trình vi phân đạo hàm riêng eliptic, những bài toán phương trình đạo hàm riêng với ràng buộc biên và những bài toán về tài chính, bài toán về giao thông. Trong những bài toán trên ta thấy có tập hợp và ánh xạ cùng tham gia vào việc phát biểu của bài toán. Căn cứ vào ánh xạ, người ta phân thành bất đẳng thức afin và bất đẳng thức phi tuyến. Ban đầu người ta chứng minh được sự tồn tại của nghiệm các bài toán với giả thiết về tính liên tục của ánh xạ T và tính lồi compact của tập A. Tiếp theo người ta phát triển các bài toán này cho trường hợp không gian vô hạn chiều, trước hết là không gian Hilbert. Sự tồn tại nghiệm của bài toán với các điều kiện nhẹ hơn: T là ánh xạ đơn điệu, A là tập lồi, đóng và thỏa mãn điều kiện bức trên A. Ngoài ra, người ta còn mở rộng các bài toán này cho trường hợp liên quan tới ánh xạ đa trị: T : $A \to 2^A$, bài toán: Tìm $\overline{x} \in A$, $\overline{v} \in T(\overline{x})$ sao cho

$$\overline{v}\langle x - \overline{x}\rangle \geq 0 \text{ với mọi } x \in A.$$

Bài toán này được gọi là bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị.

Tới năm 1994, Blum và Oettli phát biểu bài toán điểm cân bằng tổng quát: Cho X là không gian vectơ lồi địa phương thực, $A \subset X$ là một tập lồi đóng, khác rỗng và $\varphi : A \times A \to R$ là hàm thỏa mãn $\varphi(x, x) = 0$ với mọi $x \in A$. Bài toán: Tìm điểm $\overline{x} \in A$ sao cho

$$\varphi(\overline{x}, x) \geq 0, \forall x \in A.$$

Bài toán này được gọi là bài toán cân bằng. Thông thường người ta ký hiệu bài toán này là (EP(A, φ)). Hàm φ được gọi là song hàm. Hiển nhiên bài toán bất đẳng thức biến phân là trường hợp đặc biệt của bài toán cân bằng khi ta đặt $\varphi(x, y) =\langle T(x, y-x)\rangle$. Khi ấy $\varphi(\overline{x}, y) \geq 0 \Leftrightarrow\langle T(x, y-x)\rangle \geq 0$. Tức là nghiệm của bài toán cân bằng đối với hàm φ chính là nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân.

Ngoài ra các bài toán khác như bài toán điểm yên ngựa, bài toán cân bằng Nash, bài toán điểm bất động, bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị,... cũng chỉ là trường hợp riêng của bài toán cân bằng.

Trong thực tế nhiều khi ta gặp những tình huống giải bài toán này trên tập nghiệm của bài toán khác. Những bài toán như vậy được gọi là bài toán cấp hai. Mục đích của luận văn này là viết một tổng quan về sự tồn tại nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân và xây dựng thuật toán tìm nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập nghiệm bài toán bất đẳng thức biến phân khác, hay là tìm Thuật toán giải bài toán bất đẳng thức biến phân cấp hai.

Việc nghiên cứu sự tồn tại nghiệm và việc tìm ra những thuật toán để tìm nghiệm của bài toán này đóng vai trò quan trọng trong việc đưa toán học vào giải quyết các vấn đề thực tế. Chính vì vậy với mong muốn tìm hiểu nhiều hơn về vấn đề trên, cùng với sự gợi ý giúp đỡ nhiệt tình của **GS.TSKH. Nguyễn Xuân Tấn**, tôi chọn đề tài: **"Phương pháp chiếu giải bài toán bất đẳng thức biến phân hai cấp"** làm luận văn thạc sĩ của mình.

2. Mục đích nghiên cứu

Mục đích mà đề tài đặt ra là nghiên cứu phương pháp chiếu giải bài toán bất đẳng thức biến phân hai cấp. Đề tài đề xuất phương pháp mới để giải bài toán VIEP(T,φ,A) trong trường hợp bài toán $BVI(T, G, A)$ với ánh xạ giá T đơn điệu mạnh và liên tục Lipschitz, ánh xạ G đơn điệu mạnh ngược. Gần đây, bài toán này đã được P.N. Anh và cộng sự đưa ra phương pháp đạo hàm tăng cường trong [1]. Các thuật toán đề xuất được cho dưới dạng hiển, hay các bài toán phụ chỉ cần tính toán các phép chiếu của một điểm trên một tập lồi. Tuy nhiên, điểm hạn chế là thuật toán đòi hỏi phải tính toán thêm các vòng lặp trong tại mỗi bước lặp. Điểm mới trong phương pháp của chúng tôi là sử dụng tính chất co của ánh xạ $T_\lambda = I \breve{} \lambda F$ với $\lambda > 0$, F đơn điệu mạnh và liên tục Lipschitz. Khi đó, thuật toán đề xuất chỉ đòi hỏi tính toán một phép chiếu tại mỗi bước lặp, các thuật toán này có sự hiệu quả hơn về mặt cấu trúc, tính hội tụ và thực thi tính toán.